EXERCICES – SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2010, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année (2010 + n) exprimée en milliers d'habitants.

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
3) On donne $U_n = P_n + 500$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
4) Donner la formule explicite de c.
5) En déduire la formule explicite de P_n.
6) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2015 ?
7) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublée ?

Exercice 2

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2013 + n)

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? Justifier votre réponse.
2) Donner la relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression (V_n) de puis (U_n) celle de en fonction de n.
5) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire alors le sens de variation de la suite (U_n).
6) Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés.
   A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-telle plus en sureffectif ?

Exercice 3

Une association caritative a constaté que chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1 000 donateurs. On note U_n le nombre de donateurs lors de la *n-ième* année ; ainsi $U_1 = 1000$.

1) Calculer alors U_2 et U_3.
2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 300$
3) Pour tout entier naturel *n*, on pose $V_n = 1500 - U_n$. Démontrer alors que la suite (V_n) est géométrique. Précisez alors son premier terme et sa raison.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de *n*.
5) Après avoir factorisé l'expression $U_{n+1} - U_n$, en déduire le sens de variation de la suite (U_n).
6) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Au bout de combien d'années, le contexte restant le même, le nombre de donateurs dépassera-t-il 1 500?

Exercice 4

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation.
On note U_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $U_0 = 80$.
Pour tout entier naturel *n*, on note *n u* le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de *n* semaines.

1. Montrer que $U_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $a_n = U_n - 200$.
   a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier naturel *n*, exprimer a_n en fonction de *n*.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $U_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, on a: $U_{n+1} - U_n = 6 \times 0,95^n$.
   b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Exercice 5

On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$.

Soit la suite (V_n) définie sur N par : $V_n = U_n - 3$.

1) Quelle est la nature de la suite (U_n).
2) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de V_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
5) Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).

Exercice 6

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1er janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2017 + n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1. a) Justifier le coefficient $0,8$ dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2018 ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
   d) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il ?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1er janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
   a) Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
   b) Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2025.

Exercice 7

Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

Partie A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 12$. Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b) Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0,75^n + 48$.
3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

Partie B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.
Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2017.

S et U sont des nombres réels et N est un entier

```
S ← 0
U ← 900
Pour N allant de 1 à 12 :
    S ← . . .
    U ← 0,75U + 12
Fin Pour
Afficher . . .
```

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

Exercice 8

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004+n$. On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a) au 1er janvier 2005 ;
   b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

   Compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme ci-dessous.

u est un réel et n est un entier
L1 : $u \leftarrow 25\,000$
L2 : $n \leftarrow 0$
L3 : **Tant que** .... **faire**
L4 : $u \leftarrow$ ....
L5 : $n \leftarrow$ ....
L6 : **Fin Tant que**
L7 : Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10. (On pourra établir un tableau de valeurs)

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. A partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparait et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0 = 5\,000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
   c) On souhaite calculer les termes de la suite (v_n) à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	n	v_n	Evolution
2	0	5 000	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Indiquer la formule à écrire dans la cellule B3.
Indiquer la formule à écrire dans la cellule C3, permettant de calculer la différence du nombre de singes d'une année à l'autre.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\,600$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.
   d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

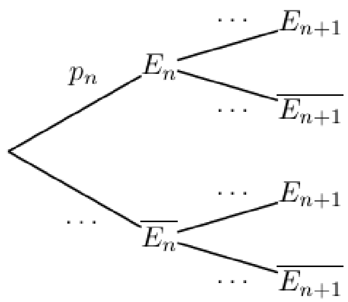
Exercice 9

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

* Un salarié malade est absent.
* La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
* Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,25$.
* Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,3$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,25$.
   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - \frac{5}{19}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.

Exercice 10

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75 \times a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100. Compléter les parties manquantes de cet algorithme.

n est un entier naturel et a est un réel

```
n ← 0
a ← 800
Tant que a < 1 100 faire
    a ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
Afficher n
```

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1\,320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1\,320 - 520 \times (0,75)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.