EXERCICES – SUITES : EXERCICES GÉNÉRAUX

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$

1° Calculer u_0 ; u_1 ; u_2

2° Etudier le sens de variation de cette suite.

3° Montrer que cette suite est majorée par 2.

Exercice 2

1° On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

a) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer u_{12}

2° On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n + 5$ $(n \in \mathbb{N})$
Etudier le sens de variation de la suite (v_n).

3° Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{8}{2x+3}$.
Une partie de sa courbe représentative est donnée en annexe.

Soit la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$, c'est-à dire $u_n = 2 + \frac{8}{2n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1° Représenter graphiquement sur **l'annexe** les quatre premiers termes de la suite. *On laissera apparents les traits de construction.*

Emettre quatre conjectures.

2° Calculer u_0, u_1, u_2

3° Etudier le sens de variation de la suite.

4° a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée.

5° On considère l'algorithme :

Données Initialisation	entrer un réel e $n = 0$ $u = 14/3$
Traitement	Tant que $\lvert u - 2\rvert \geq e$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $2 + \frac{8}{2n+3}$ FinTantque
Affichage	Afficher n

a) En faisant fonctionner l'algorithme avec $e = 0{,}5$; préciser la valeur affichée pour n. On détaillera les différentes étapes.

b) Un utilisateur a fait fonctionner l'algorithme avec $e = 0{,}01$ et a obtenu comme valeur $n = 399$.
Interpréter cette valeur obtenue.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1. Dans le repère orthonormé en **annexe** ,
   a) Tracer la droite Δ représentant la fonction f et la droite d d'équation $y = x$
   b) En utilisant ces droites, placer les termes u_0 ; u_1 ; u_2; u_3; u_4 de la suite sur l'axe des abscisses.
   Laisser apparents les traits de construction.
   c) Emettre des conjectures.

2.a. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3

2.b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{10} à l'aide de votre calculatrice.

2.c. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il donne :

la valeur du terme de rang n et la somme des termes de u_0 à u_n

Données Initialisation	Entrer un entier n
Traitement	Pour … allant de … à … FinPour
Sortie /Affichage	Afficher

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$, pour $n \in \mathbb{N}$

3. a. Calculer v_0 ; v_1 ; v_2

3. b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

4. On considère la suite (w_n) définie par $w_n = 6 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Montrer que les suites (u_n) et (w_n) sont égales.

5. Déduire la valeur exacte de u_{16} .

6. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$

1) A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n) pour les grandes valeurs de n.
   On prendra comme fenêtre : $X \in [0; 1]$ et $Y \in [0; 0,5]$

2) On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.
   Prouver que la suite (v_n) est arithmétique. Donner son premier terme et sa raison.

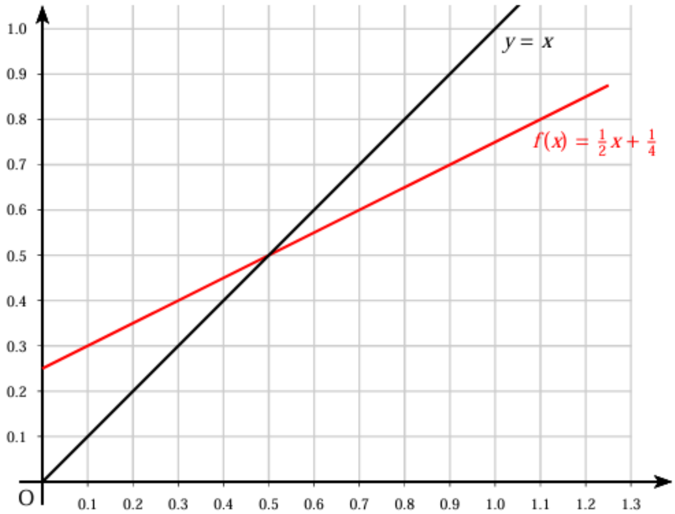
3) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

4) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$.

1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-desssous.
Conjecturer alors limite de la suite (u_n).

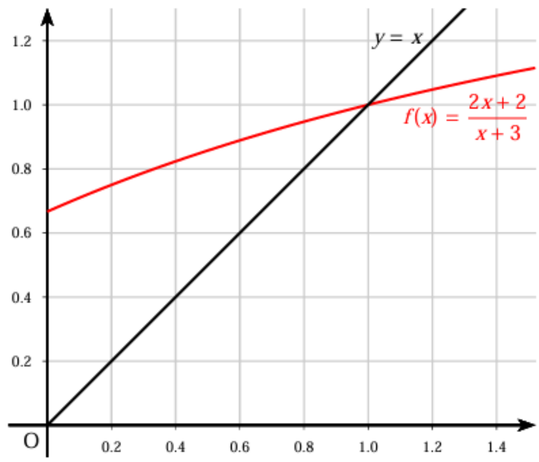


2) On pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.
   a) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$.

1) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur la représentation ci-desssous.
Conjecturer alors limite de la suite (u_n).



2) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
   a) Prouver que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de (v_n) ? En déduire la limite de (u_n).